

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2025

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα 16/06/2025, 08:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο
αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0, 0)$ και εστία το σημείο $E(2, 0)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της παραβολής.

(Μονάδες 2)

β) Την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής.

(Μονάδα 1)

γ) Τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

(Μονάδες 2)

A2. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , για τους οποίους να ισχύει:

$$\int (\alpha e^x - \beta \ln 2x + \gamma) dx = e^x + \sin 2x - x + c$$

(Μονάδες 5)

A3. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=11}^{100} (3k^2 - 3k + 1)$$

(Μονάδες 2)

A4. Δίνονται τα ψηφία: 1, 1, 2, 3, 3, 4.

α) Να υπολογίσετε το πλήθος των εξαψήφων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία.

(Μονάδες 2)

β) Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο τριάρια σε διαδοχικές θέσεις (παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι: 133241);

(Μονάδες 2)

γ) Πόσοι από τους εξαψήφιους αριθμούς του υποερωτήματος **(α)** δεν περιέχουν τον αριθμό έντεκα;

(Μονάδα 1)

A5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^5 - 3x^3 + 4x + 7 = 0$, έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση) στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

A6. α) Έστω ότι η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}(\sin x) + x$ είναι σταθερή στο $[0, \pi]$.

(Μονάδες 2)

A7. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$ και $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T .

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(Μονάδες 2)

A8. Σε κώνο με ακτίνα 2 m και ύψος 5 m, εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος.

(Μονάδες 5)

A9. Έστω ότι η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ είναι η $y = -x + \alpha + \beta$.

(Μονάδα 1)

β) Αν η f' είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι:
 $f(x) + x \geq \alpha + \beta, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 4)

A10. Δίνονται τέσσερα δοχεία, Α, Β, Γ και Δ, και εννέα διαφορετικά μολύβια.

(Δεν υπάρχει περιορισμός στη χωρητικότητα των δοχείων.)

α) i) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά;

(Μονάδες 2)

ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «το δοχείο Α να περιέχει ακριβώς πέντε μολύβια».

(Μονάδα 1)

β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά, ώστε κάθε δοχείο να περιέχει τουλάχιστον ένα μολύβι;

(Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας της, τα τοπικά της ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της και να την παραστήσετε γραφικά.

(Μονάδες 10)

B2. α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx$$

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0$$

(Μονάδες 2)

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\eta\mu x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\eta\mu x}}{1+e^{\eta\mu x}} dx = \pi$$

(Μονάδες 5)

B3. Τέσσερις αθλητές της καλαθόσφαιρας, ο Ανδρέας, ο Βασίλης, ο Γιάννης και ο Δημήτρης, ρίχνουν με τη σειρά μια βολή στο ίδιο καλάθι με ποσοστό ευστοχίας, 5%, 15%, 30% και 40%, αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι εύστοχες και οι τέσσερις βολές.

(Μονάδες 2)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι άστοχες και οι τέσσερις βολές.

(Μονάδες 3)

γ) Αν οι τρεις βολές από τις τέσσερις είναι εύστοχες, να βρείτε την πιθανότητα αυτές να είναι οι βολές του Ανδρέα, του Βασίλη και του Γιάννη.

(Μονάδες 5)

B4. Δίνεται ο κύκλος (K) με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και $A(R\sigma\upsilon\nu\theta, R\eta\mu\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$ τυχαίο σημείο του. Φέρουμε ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .

α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία $B(-R\eta\mu\theta, R\sigma\upsilon\nu\theta)$ και $\Gamma(R\eta\mu\theta, -R\sigma\upsilon\nu\theta)$.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι, η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(Μονάδες 6)

B5. Έστω συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 4$ και $f(0) = 1$.

α) Αν $u(x) = f'(x) - 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $u'(x) - 3u(x) = 0$.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι $u(x) = 2e^{3x}$.

(Μονάδες 3)

γ) Να αποδείξετε ότι $(e^{-2x}f(x))' = 2e^x$.

(Μονάδες 2)

δ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2}{v}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i (x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{v} - \bar{x}^2},$$

όπου $v = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - v\bar{x}\bar{y}}{vS_x S_y}, \quad \text{όπου } \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_v y_v$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu x = \eta\mu \alpha$	$x = 360^\circ \kappa + \alpha$ ή $x = 360^\circ \kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \alpha$	$x = 360^\circ \kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \alpha$	$x = 180^\circ \kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$$

Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\epsilon}$,

Εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \quad (\epsilon\varphi x)' = \tau\epsilon\mu^2 x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\epsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\epsilon\mu x + \epsilon\varphi x| + c \quad \int \sigma\tau\epsilon\mu x \, dx = \ln\left|\epsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau\omicron\xi\epsilon\varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$